Université A. Assaadi
Faculté des Sciences
Département Math. et Inf.

SMP_SMC
Algèbre S_2
2008_2009

Série _ Révision

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f((x,y,z)) = (2x+y+z, -x-z, x+y+2z)$

a/ Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

b/ Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$e'_1 = -e_1 + e_2 \quad e'_2 = -e_1 + e_3 \quad e'_3 = e_1 - e_2 - e_3$$

1/ Déterminer la matrice de passage P de B à B' et la matrice de passage de B' à B (P^{-1})

2/ En déduire la matrice A' de f, relativement à la base B'. $A' = P^{-1} A P$

Exercice 3 : Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a+i\alpha & \alpha+ia & a+\alpha \\ b+i\beta & \beta+ib & b+\beta \\ c+i\gamma & \gamma+ic & c+\gamma \end{vmatrix}$$

Exercice 4 : Calculer l'inverse des matrices suivantes :



$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -3 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ defini par sa matrice relativement canonique de $\mathbb{C}^3$ et note B

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a/ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de associés à g.

b/ Existe-t-il une base de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres ?

c/ Calculer $(B - 5I_3)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et en deduire B^n.

Exercice 6 :

1/ Déterminer le polynômes caractéristique et chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres associés en donnant leur bases, des endomorphismes suivants dont les matrices relativement aux bases canoniques sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2/ Dans chaque cas, dire s'il existe une base de l'espace formée de vecteurs propres. Dans le cas affirmatif, donner la matrice de l'endomorphisme relativement à cette nouvelle base.



$I^{+\infty} = I$

car I est une matrice diagonal

Série Révision Corrigé — SMC/SMP Algèbre S2

Ex1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. On a

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k J^k (2I)^{n-k} = 2^n I + C_n^1 2^{n-1} J I^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} J^2 I^{n-2}$$ D'où

- $I^{n-1} = I^n \cdot I^{-1} = \frac{I^n}{I^1} = 1$
- $I^{n-2} = I^n \cdot I^{-2} = \frac{I^n}{I^2} = 1$
- $C_n^1 = \frac{n}{1!} = n$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} = \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Ex2 $f(e_1) = f((1,0,0)) = (2,-1,1)$; $f(e_2) = (1,0,1)$, $f(e_3) = (1,-1,2)$

ⓐ $M(f, B) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ⓑ 1)

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} e_1 = -e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ e_2 = -e'_2 - e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_3 \end{cases}$, D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A' = M(f, B') = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e_1 $(-2, -1, 1)$ $(1,0,0)$

$-3, -1, -2$

Ex3 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1+L_2 \\ \\ L_3+L_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

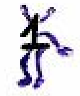
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \; (C_2 - 2C_1,\ C_3 - C_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & -21 & -21/2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; (C_4 - C_1) = \begin{vmatrix} a & b & c & 1-a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c & 1-a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; (C_3 - C_1) = -\begin{vmatrix} b & c & 1-a-b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= a + b + c - 1$

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+i\alpha & \alpha+ia & a+\alpha \\ b+i\beta & \beta+ib & b+\beta \\ c+i\gamma & \gamma+ic & c+\gamma \end{vmatrix} \; (C_1 - C_3,\ C_2 - C_3) = \begin{vmatrix} (i-1)\alpha & (i-1)a & a+\alpha \\ (i-1)\beta & (i-1)b & b+\beta \\ (i-1)\gamma & (i-1)c & c+\gamma \end{vmatrix} = (i-1)^2 \begin{vmatrix} \alpha & a & a+\alpha \\ \beta & b & b+\beta \\ \gamma & c & c+\gamma \end{vmatrix} \; (C_3 - C_1 - C_2)$

$= 0$





Ex4 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = ix + 2y - 3z \\ y' = iy + 2z \\ z' = iz \end{cases} \iff \begin{cases} z = -iz' \\ y = -iy' - 2z' \\ x = -ix + 2y + (3-4i)z \end{cases}$ $\lambda/i = -i$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3-4i \\ 0 & -i & -2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3-4i \\ 0 & -i & -2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

. Pour B, la même chose. On trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ex 5 ⓐ $\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3$. Donc g admet une valeur propre unique $\lambda = 5$. Pour déterminer le sous-espace propre associé on résoud le système $(B - 5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff$ $y = z = 0$. Sa dimension est 1.

ⓑ On en déduit qu'il n'y a pas de bases formées uniquement de vecteurs propres.

ⓒ $(B - 5I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(B - 5I_3)^m = 0$ pour $m \geq 3$.

$B = 5I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Donc $B^n = 5^n I_3 + 5^{n-1} C_n^1 J + 5^{n-2} C_n^2 J^2$.

Donc : $B^n = \begin{pmatrix} 5^n & n5^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 5^{n-2} \\ 0 & 5^n & n5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

Ex 6 • $P_{A_1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ <u>On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u>

A_1 n'admet pas de val prop. dans $\mathbb{R}$.

• $P_{A_2} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$ A_2 admet 3 val prop distinctes Donc A_2 est diagonalisable.

• $P_{A_3} = (4-\lambda)^2(1-\lambda)$. le sous-espace propre associé à $\lambda = 4$ est de dimension 1. Donc A_3 non diagonalisable.

• $P_{A_4} = (2-\lambda)^3$. le sous espace propre associé à $\lambda = 2$ est de dimension 1. Donc A_4 n'est pas diagonalisable.




ETUSUP.com